BELLAL NABILA
Université du 20 août 1955 Skikda

ANALYSE FONCTIONNELLE

October 3, 2020

Table des matières

1 Préliminaire 2

Bibliographie 14

1 Préliminaire

Définition 1.1. *(distance)*
Soit E un ensemble non vide. Une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ définit une métrique (ou une distance) sur E si elle vérifie $\forall x, y, z \in E$:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie),*
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.2. *(espace métrique)*
On appelle espace métrique tout couple (E, d) où d est une métrique (ou une distance) surE.

Définition 1.3. *(distances équivalentes)*
Deux distances d_1, d_2 sur un même ensemble E, sont dites équivalentes s'il existe deux nombres $\alpha, \beta > 0$ vérifiant :

$$\alpha\, d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta\, d_1(x, y),\ \forall x, y \in E.$$

Définition 1.4. *(sous-espace métrique)*
Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E. On appelle sous-espace métrique A de E l'ensemble A muni de la distance d_A définie par $d_A(x, y) = d(x, y)\, \forall x, y \in A$. d_A est appelé distance induite.

Définition 1.5. *(espace produit)*
Soient $(E_1, d_1), (E_2, d_2), \ldots, (E_n, d_n)$ n espaces métriques. On définit sur l'espace produit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ les trois distances équivalentes suivantes :

$$\begin{cases} \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in E, \\ \delta(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i),\ \delta'(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i) \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \delta''(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} \{ d_i(x_i, y_i) : i = 1, ..., n \}. \end{cases}$$

On peut vérifier qu'elles constituent des distances sur E et elles sont équivalentes. Ces distances sont appelées distances usuelles.

Exemple 1.1. *(distances)*

1. *On définit sur $E = \mathbb{R}, (E = \mathbb{C})$ l'application $(x, y) \to |x - y|$ est une distance sur E appelée distance usuelle.*
2. *Soit $E = \mathbb{R}^n, \forall x = (x_1, ..., x_n), \forall y = (y_1, ..., y_n)$, on pose*

$$\delta(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \delta'(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \delta''(x,y) = \sup_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$$

   On peut vérifier que δ, δ' et δ'' sont des distances sur E.

3. *L'espace des fonctions continues noté par $E = C([a,b], \mathbb{R})$ muni de la distance de la convergence uniforme d_∞ est un espace métrique :*
   $d_\infty(f,g) = \sup_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|$.
   $d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$ est aussi une distance sur E.

Définition 1.6. *(diamètre, ensemble borné)*
On appelle diamètre d'une partie A d'un espace métrique E la borne supérieure $\delta(A)$ des distances $d(x,y)$ où x et $y \in A$:

$$\delta(A) = \sup \{ d(x,y) / x, y \in A \}.$$

On dit que A est borné lorsque son diamètre est fini.

Définition 1.7. *(distance entre deux ensembles)*
Soient A et B deux parties d'un espace métrique E muni de la distance d. On appelle distance de A et B la borne inférieure des distances $d(x,y)$ où $x \in A$ et $y \in B$:

$$d(A,B) = \inf \{ d(x,y) / x \in A, y \in B \}.$$

Définition 1.8. *(norme, semi-norme)*
Soit E un espace vectoriel quelconque sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On appelle semi-norme sur E une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie $\forall x, y \in E, \forall k \in \mathbb{K}$:

1. $N(kx) = |k| N(x)$ *(homogénéité)*
   Où $|.|$ désigne la valeurs absolue si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou le module si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2. $N(x + y) \le N(x) + N(y)$ *(inégalité triangulaire).*

Si de plus N vérifie :

3. $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(séparation),*

on dit que N est une norme sur E et on notera N par $\|.\|$.

Définition 1.9. *(espace vectoriel normé)*
Un espace vectoriel normé (ou en abrégé : e.v.n) est un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) muni d'une norme.

Définition 1.10. *(normes équivalentes)*
Soit E un espace vectoriel normé muni de deux normes : $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. On dit que ces deux normes sont équivalentes si :

$$\exists \alpha,\, \beta > 0,\, \alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 \ \forall x \in E.$$

Exemple 1.2. *(normes)*

1. $$\begin{cases} \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \\ \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,\ \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|x\|_3 = \sup \left\{ |x_i|,\ i = \overline{1,n} \right\}. \end{cases}$$

   $\|.\|_i$ définissent des normes sur $\mathbb{R}^n$ et elles sont équivalentes, avec $i = 1, 2, 3$.

2. $$\|f\|_1 = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|,$$

   $$\|f\|_2 = \int_a^b |f(x)| dx$$

   sont des normes sur $E = C([a, b], \mathbb{R})$.

3. *$L^p(\Omega)$: espace des fonctions de puissance p- ième intégrables sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ pour la mesure de Lebesgue muni de la norme*

   $$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},\ 1 \leq p < +\infty$$

   est un espace vectoriel normé.

4. $l^p = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < +\infty \right\}$ *est un espace vectoriel normé muni de la norme*

$$\|x\| = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} ; \ 1 \leq p < +\infty.$$

Proposition 1.1.
Un espace vectoriel normé est un espace métrique pour la distance

$$d(x,y) = \|x-y\| \ \forall x, y \in E$$

.

Définition 1.11. *(espace préhilbertien)*
Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Un produit scalaire sur E est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ tel que : pour tout x, x_1, x_2, $y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

1. $\varphi(x,x) \geq 0$ *et* $\varphi(x,x) = 0$ *si et seulement si* $x = 0$,
2. $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$,
3. $\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$,
4. $\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x,y)$.

Nous utiliserons $\varphi(x,y) = \langle x, y\rangle$ pour désigner un produit scalaire. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $\overline{\varphi(y,x)} = \overline{\langle y, x\rangle} = \langle y, x\rangle$. Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

Proposition 1.2.
Dans un espace préhilbertien E, l'application $\|.\| : E \to \mathbb{R}$, donnée par $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$, pour tout $x \in E$, est une norme pour E (c'est donc un espace vectoriel normé).

Exemple 1.3. *(produit scalaire)*

1. $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ *est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. La norme associée, appelée "norme euclidienne" est définie par*

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. $\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$ *est un produit scalaire sur*

$$l^2 = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < +\infty \right\}$$

avec $x_n \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*). La norme associée est*

$$\|x\| = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. $\langle u, v\rangle_{L^2} = \int_\Omega u(x)v(x)dx \ \forall u, v \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ *est un produit scalaire sur* $L^2(\Omega)$*. La norme associée est :*

$$\|u\|_{L^2} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

4. $\langle u, v\rangle_{H^1} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2}, \forall u, v \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ *est un produit scalaire sur l'espace de Sobolev* $H^1(\Omega)$*. La norme associée est :*

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.12. *(boule ouverte, fermée, sphère)*
Soit (E, d) *un espace métrique,* a *un point de* $E, r > 0$*. Les ensembles :*

$$B(a, r) = \{x \in E / d(x, a) < r\},$$

$$\bar{B}(a, r) = \{x \in E / d(x, a) \leq r\},$$

$$S(a, r) = \{x \in E / d(x, a) = r\}.$$

sont appelées respectivement boule ouverte, boule fermée, sphère de centre a *et de rayon* r*.*

Proposition 1.3. *(exercice)*
Une partie A *d'un espace métrique* (E, d) *est bornée si et seulement si elle est contenue dans une boule fermée.*

Définition 1.13. *(voisinage, ouvert, fermé)*

— *Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'un sous-ensemble A de E est ouvert s'il est vide ou pour tout $a \in A$ il existe une boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$ contenue dans A. On dit qu'une partie F de E est fermée si son complémentaire est ouvert :*

$$(F^c = U \, ouvert) \Leftrightarrow F fermé.$$

— *Soit $V \subset E$ et $x \in E$ on dit que V est un voisinage de x s'il existe une partie ouverte U de E tel que x appartient à U et U inclus dans V.*

Proposition 1.4. *(exercice)*
Dans un espace métrique quelconque, toute boule ouverte est un ensemble ouvert, toute boule fermée est un ensemble fermé.

Définition 1.14. *(topologie induite par une distance)*
Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *A est réunion de boules ouvertes.*

(ii) $\forall a \in A \; \exists r \in \mathbb{R}_+^* B(a, r) \subset A$.

L'ensemble formé par les parties A de E vérifiant les assertions précédentes est une topologie sur E dite topologie induite par la distance d (ou associée à d). On rappelle :

Définition 1.15. *(espace topologique)*
On appelle espace topologique tout couple constitué par un ensemble E et un ensemble T de parties de E appelées ensembles ouverts (ou en abrégé, ouverts) et satisfaisant aux trois propriétés suivantes :

T_1 *Toute réunion (finie ou non) d'ouverts est ouverte.*

T_2 *Toute intersection finie d'ouverts est ouverte.*

T_3 *L'ensemble E et l'ensemble vide $\emptyset$ sont ouverts.*

On dit encore que l'ensemble T de parties de E définit, sur E une topologie. L'ensemble E, muni de cette structure, est appelé espace topologique.

Remarque 1.1.
Si $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont deux normes équivalentes alors les deux distances associées le sont aussi et par conséquent les topologies induites par ces deux distances sont également équivalentes (c'est-à-dire déterminent la même structure topologique sur E, ou encore la même famille d'ouverts sur E).

Définition 1.16. *(interieur, adhérence, ensemble dense)*
Soit (E,T) un espace topologique, A une partie de E.

1. *Un point x de E est dit intérieur à A si et seulement si A est un voisinage de x. On appelle intérieur de A qu'on note $\mathring{A}$, l'ensemble des points intérieurs à A. On appelle extérieur de A l'intérieur de A^c i.e, $\overset{\circ}{\frown}{A^c}$.*
2. *Soit $x \in E$, on dit que x est adhérent à A si tout voisinage de x contient un point de A :*

$$\forall V \ (voisinage\ de\ x), V \cap A \neq \emptyset.$$

On dit que x est un point d'accumulation de A si tout voisinage de x contient un point de A autre que x :

$$\forall V \ (voisinage\ de\ x), V \diagdown \{x\} \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow (\exists y \in V \cap A, y \neq x)$$

On dit que x est un point isolé de A s'il appartient à A, mais n'en est pas un point d'accumulation, autrement dit s'il existe un voisinage de x qui ne contient aucun autre point de A que x. Ainsi, dire que x est adhérent à A équivaut à dire que, ou bien x est un point d'accumulation de A, ou bien x est un point isolé de A. On appelle adhérence de A noté $\bar{A}$, l'ensemble des points de E qui sont adhérents à A. L'ensemble des points d'accumulation de A est noté par $A\prime$.

3. *La frontière $Fr(A)$ d'un sous-ensemble A de E est l'ensemble des points x dont tout voisinage V contient au moins un point de $\overline{A}$ et un point de $\overline{A^c}$. On a donc $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$. Sur cette formule on voit que la frontière de tout ensemble est fermée.*
4. *On appelle partie dense d'un espace métrique E toute partie A de E telle que $\overline{A} = E$ et on dit que A est non dense ou rare si $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$.*

Définition 1.17. *(espace séparable)*
Un espace métrique (E,d) est dit séparable s'il contient un sous-ensemble au plus d'énombrable dense dans E.

Définition 1.18. *(application continue)*
Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques.

— *On dit que $f : E \to F$ est continue en $x_0 \in E$ si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, d(x, x_0) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Autrement dit f est continue en x_0 si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in B_d(x_0, \eta) \Rightarrow f(x) \in B_\delta(f(x_0), \epsilon)$$

— *On dit que $f : E \to F$ continue sur E si elle est continue en tout point de E c'est-à-dire*

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in E, \exists \eta > 0, \forall y \in E, d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Proposition 1.5. *(exercice)*
Soient $(E, d), (F, \delta)$ deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *f est continue.*

(ii) *Pour tout ouvert O de F, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E.*

(iii) *Pour tout fermé G de F, $f^{-1}(G)$ est un fermé de E.*

Proposition 1.6. *(exercice)*
Soient $(E, d), (F, \delta)$ deux espaces métriques $f : E \to F$ une application. f est continue si et seulement si pour toute partie A de E $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.

Définition 1.19. *(continuité uniforme, application Lipschizienne)*

Soient (E, d) et (F, δ) Deux espaces métriques.

— *On dit que $f : E \to F$ est continu uniformément sur E si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x,\ y \in E, d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

— *On dit que f est $k-$Lipschizienne avec $k > 0$ si*

$$\forall x, y \in E, \delta(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$$

et dans le cas où $k < 1$ on dit que f est une application contractante (ou de contraction).

Proposition 1.7.
Soient $(E, d), (F, \delta)$ deux espaces métriques $f : E \to F$ une application. On a les implications suivantes :

f Lipschizienne $\Rightarrow$ f uniformément continue $\Rightarrow$ f continue.

Définition 1.20. *(homéomorphisme)*

— *On dit que f est un homéomorphisme si f est une bijection continue d'inverse continue.*

— *On dit que f est un uniformément homéomorphisme si f est une bijection uniformément continue d'inverse uniformément continue.*

Proposition 1.8. *(exercice)*
Un homéomorphisme de E sur F transforme un ouvert de E (respectivement un fermé de E) en un ouvert de F (respectivement un fermé de F).

Définition 1.21. *(les suites)*
Soit (E,d) un espace métrique. Rappelons qu'une suite est un ensemble de points indexés par les éléments de $\mathbb{N}$ dans E. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que : $\varphi(k) = n_k$ une application croissante. L'ensemble des points $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est encore un ensemble de points indexés par les éléments de $\mathbb{N}$ et est appelé suite extraite ou sous-suite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 1.22. *(limite d'une suite)*
Soit (E,d) un espace métrique. une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des éléments de E converge vers un élément $l \in E$ dans la métrique d, si pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un nombre naturel $n_0(\epsilon)$, tel que
$d(x_n, l) < \epsilon$ pour tout les $n > n_0(\epsilon)$, ou encore

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > n_0 \Rightarrow d(x_n, l) < \epsilon).$$

l'élément l est la limite de la suite. En d'autre terme, nous avons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$ si et seulement si la suite numérique $\{d(x_n, l), n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ converge vers 0.

Définition 1.23. *(suite bornée)*
Une suite d'éléments de l'espace métrique (E,d) est dite bornée si et seulement si l'ensemble de ses valeurs est une partie bornée de (E,d).

Proposition 1.9.
Soit $f : (E,d) \to (F,\delta)$ et $x \in E$. f est continue en x si et seulement si

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E \text{ tel que : } \lim_{n\to+\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x).$$

Proposition 1.10.
Soit (E,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de E qui converge vers l alors toutes suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Définition 1.24. *(valeur d'hérence d'une suite)*
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace métrique (E,d). Un élément $a \in E$ est dit valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si

$$\forall V(\textit{voisinage de } a),\ \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists\, n \geq n_0 : x_n \in V$$

ou bien d'une manière équivalente

$$\forall V(\textit{voisinage de}\, a)\, \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \textit{ est un ensemble infini.}$$

Proposition 1.11.
Soit A un sous-ensemble de E ; on a équivalence entre les deux assertions suivantes :

(i) *x est un point adhérent à A,*

(ii) *Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers x.*

Proposition 1.12.
Soit E un espace métrique et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de point de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *a est une valeure d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

(ii) *Il existe une suite partielle (x_{n_k}) qui converge vers a.*

Proposition 1.13.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de l'espace métrique (E, d). Posons

$$X_n = \{x_k : k \geq n\}.$$

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{X_n}$. C'est donc un fermé de E.

Remarque 1.2. *(devoir à domicile)*
On rappelle les propriétés suivantes :

1. *Si $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$, alors l est l'unique valeur d'adhérence de la suite.*
2. *Si a est valeur d'adhérence d'une sous-suite, alors a est valeur d'adhérence de la suite considérée.*
3. *Si $f : (E, d) \to (F, \delta)$ une application continue, a valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors $f(a)$ est valeur d'adhérence de la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$.*

Proposition 1.14.
Soient (E, d) un espace métrique et F un sous-ensemble de E. On a équivalence entre les deux assertions suivantes :

(i) *F est fermé,*

(ii) *Pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente d'éléments de* F*, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ *est élément de* F*.*

Définition 1.25. *(espace séparé)*
On dit qu'un espace topologique (E,T) *est séparé ou de Hausdorff lorsque deux points distincts quelconques de* E *possèdent deux voisinages disjoints. En d'autre terme*

$$\forall x,\, y \in E\,(x \neq y)\,, \exists\, O_x \in T, \exists\, O_y \in T \text{ tel que : } O_x \cap O_y = \emptyset.$$

Exemple 1.4.
Tout espace métrique est un espace topologique séparé.

(relation entre interieur et adhérence)

Remarque 1.3.
Dans tout espace topologique E *on a :*

$$\begin{cases} \left(\mathring{A}\right)^c = \overline{A^c}. \\ \left(\overline{A}\right)^c = \overset{\circ}{\widehat{A^c}}. \end{cases}$$

où A *est un sous-ensemble de* E*.*

EXERCICES

Exercice 1.1.
Montrer qu'une partie A d'un espace métrique (E,d) est bornée si et seulement si elle est contenue dans une boule fermée.

Exercice 1.2.
Montrer que dans un espace métrique quelconque, toute boule ouverte est un ensemble ouvert, toute boule fermée est un ensemble fermé.

Exercice 1.3.
Soient $(E,d),(F,\delta)$ deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *f est continue.*

(ii) *Pour tout ouvert O de F, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E.*

(iii) *Pour tout fermé G de F, $f^{-1}(G)$ est un fermé de E.*

Exercice 1.4.
Soient $(E,d),(F,\delta)$ deux espaces métriques $f : E \to F$ une application. Montrer que f est continue si et seulement si pour toute partie A de E $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.

Exercice 1.5.
Montrer qu'un homéomorphisme de E sur F transforme un ouvert de E (respectivement un fermé de E) en un ouvert de F (respectivement un fermé de F).

Bibliographie

[1] **H. Brezis** . Analyse Fonctionnelle. Théorie et application, Masson, 1983

[2] **W. Hengartner, M. Lambert, C. Reischer**. Introduction à l'analyse fonctionnelle, les presses de l'université du Québec, 1981.

[3] **L. Schwartz.** Topologie générale et analyse fonctionnelle. Edi. Hermann, 1993.